

El efecto de Talbot: de la óptica a la ecuación de Schrödinger

✉ Daniel Eceizabarrena
BCAM - Basque Center for Applied
Mathematics
deceizabarrena@bcamath.org

Resumen: El objetivo de este artículo es dar a conocer un bello efecto óptico que se denomina efecto de Talbot. Primero, describiremos el fenómeno y comentaremos su descubrimiento a mediados del siglo XIX. A continuación, analizaremos las razones del fenómeno y lo justificaremos mediante algunos cálculos apoyados en las leyes físicas que gobiernan la propagación de ondas, así como por medios analíticos. Por último, veremos que este efecto se reproduce en algunas soluciones de la ecuación de Schrödinger, que muestran el mismo comportamiento que la luz.

Palabras clave: efecto de Talbot, óptica, ondas, Helmholtz, Schrödinger, sumas de Gauss.

MSC2010: 78A99.

Agradecimientos: En primer lugar, quiero mostrar mi agradecimiento a Luis Vega por haberme presentado este tema y por su ayuda en la clarificación de varias cuestiones. Asimismo, me gustaría nombrar a Sandeep Kumar, con quien comencé a entender el proceso físico que nos ocupa; a Aitor Eceizabarrena, quien muy acertadamente me asistió en la traducción de fragmentos de artículos, y a Markel Epelde, cuyas sugerencias y comentarios me han sido de gran ayuda.

Este trabajo ha contado con la financiación del Ministerio de Educación, Cultura y Deporte para la Formación de Profesorado Universitario FPU15/03078.

1. Introducción y orígenes

El efecto de Talbot es un fenómeno óptico microscópico que consiste en la repetición de un patrón que la luz forma cuando atraviesa una rejilla. La causa reside en la *difracción* que sufre la luz en su calidad de onda y que se genera cuando esta pasa cerca de un obstáculo o una apertura. La difracción es un efecto inherente a toda onda, aunque la apreciamos de manera más clara y visible cuando experimentamos con ondas de agua y de luz. En el caso del agua, si una ola se dirige hacia una pared con una pequeña apertura vertical, las olas resultantes que atraviesan la apertura se propagarán de manera circular en vez de recta. En el caso de la luz, la difracción hace que los diferentes colores se separen, generando efectos llamativos como cuando miramos al reflejo de un CD.

Consideremos que, en un plano bidimensional con ejes x y z , tenemos una pared en $z = 0$ en la que hemos realizado un agujero. Hagamos que una onda plana, cuyos frentes de onda forman líneas rectas, se dirija perpendicularmente hacia la pared. Cuando alcance la pared, el único punto por el que la onda pasará será el agujero, que se comportará como una fuente de una onda esférica (en este caso bidimensional, una onda circular) con la misma longitud de onda y velocidad que la onda original. Esta situación se muestra en la figura 1 y es el ejemplo más básico de difracción.

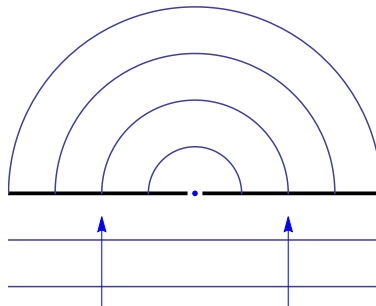


Figura 1: El caso más básico de la difracción de las ondas. Intuitivamente, podemos pensar en una ola dirigiéndose hacia un muro con una apertura, donde se generan nuevas olas circulares.

Si en lugar de hacer un solo agujero en la pared la perforamos de tal manera que haya agujeros separados de manera equidistante formando una rejilla, cada uno de los agujeros se comportará como una fuente de ondas esféricas. Además, en este caso deberemos tener en cuenta la interferencia entre ondas de diferentes fuentes. Esta es la situación en la que ocurre el efecto de Talbot, cuando las ondas que enviamos hacia la rejilla son de luz, como describimos a continuación. Imaginemos que la distancia entre los agujeros es muy pequeña (más adelante concretaremos el significado de *muy pequeño*) y que colocamos una lente frente a la rejilla, en el lado contrario a la fuente de luz, de tal manera que la lente capte la luz que sale de la rejilla y amplifique la imagen recibida para que la podamos ver con los ojos. Según movemos la lente adelante o atrás, la imagen recibida varía como consecuencia de la interferencia. Pero existe una distancia particular, conocida como **distancia de Talbot** y que denotaremos como z_T , desde la que la lente reproduce la propia rejilla con una precisión asombrosa. El observador en z_T es, por lo tanto, capaz de ver la rejilla. Este efecto, en el que la interferencia de las diferentes ondas de luz difractadas genera una copia de la rejilla, es lo que se conoce como **efecto de Talbot** (véase la figura 2).

El efecto de Talbot recibe su nombre del científico británico William Henry Fox Talbot (1800-1877), quien contaba entre sus intereses disciplinas tan diferentes como la fotografía, la arqueología o la política. Por supuesto, fue el tiempo que le dedicó a la primera el que generó el tema que nos ocupa. En la cuarta entrega de la serie de artículos denominados *Facts Relating to Optical Science* [10] que publicó en 1836, Talbot describió los resultados de dirigir la luz hacia dos prismas pegados entre sí y dio una pista de la razón por la que los fenómenos de difracción en los campos cercano y lejano reciben los nombres de difracción de Fresnel y de Fraunhofer respectivamente. Talbot escribió que fue Fresnel quien observó por primera vez luz difractada a través de un microscopio y Fraunhofer quien hizo lo propio a través del telescopio. Anteriormente, Newton y Grimaldi habían realizado sus observaciones, menos precisas, directamente sobre una hoja de papel que utilizaban como pantalla receptora de la luz. Pero en lo que nos concierne, lo más interesante que Talbot reflejó en su artículo es el siguiente experimento. En sus palabras,

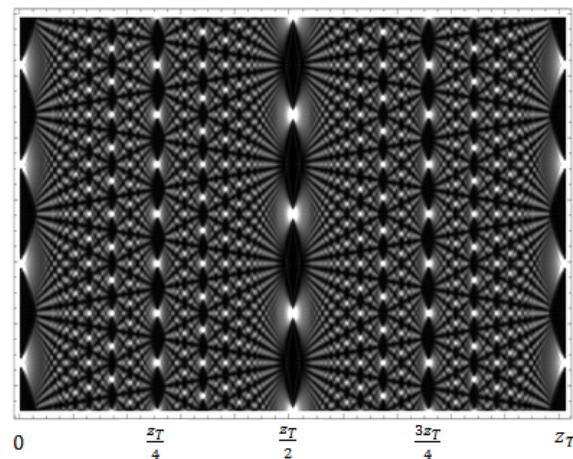


Figura 2: La visualización del efecto de Talbot, en lo que se denomina una **alfombra de Talbot**. La imagen muestra la luz que recibe un observador o una pantalla situada a diferentes distancias de la rejilla. El extremo izquierdo representa la rejilla mencionada, que recibe la luz desde el lado izquierdo. Vemos que en el extremo derecho esta rejilla se repite. En distancias intermedias, se forman diferentes patrones de luz. Hay una versión interactiva de la imagen en la dirección web de Quantum Interactive [8]. Versión modificada de una figura de Ben Goodman con licencia CC BY-SA 3.0 que se distribuye bajo la misma licencia que la original, disponible en https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Optical_Talbot_Carpet.png.

«a unos tres o seis metros del punto radiante, coloqué en la trayectoria del rayo de luz una rejilla vertical equidistante fabricada por Fraunhofer». Talbot describe una rejilla equidistante como «una plancha de cristal cubierta con pan de oro con varios centenares de cortes paralelos, de tal manera que la luz sea transmitida en intervalos idénticos». Después, describe lo que observó al mirar hacia ella:

Entonces observé la luz que había pasado a través de la rejilla mediante una lente de considerable poder de aumento. La imagen era muy curiosa, formada por una alternancia regular de líneas o bandas rojas y verdes, en dirección paralela a la de los cortes de la rejilla. Alejando un poco la lente, las bandas cambiaban de color gradualmente, y se convertían alternativamente en azules y amarillas. Cuando alejaba la lente un poco más, las bandas recuperaban el color rojo y verde. Y este cambio se repetía un número indefinido de veces, a medida que la distancia entre la rejilla y la lente aumentaba. En todos los casos, las bandas presentaban dos colores complementarios.

Era muy curioso observar que aunque la lente estaba lo suficientemente lejos de la rejilla como para no enfocarla, la apariencia de las bandas era perfectamente distinguible y nítida.

Sin embargo, esto solo ocurre cuando el punto radiante tiene un diámetro aparente *muy pequeño*, en cuyo caso la lente puede ser alejada de la rejilla hasta unos 50 centímetros, sin afectar demasiado a la belleza y nitidez de las bandas de color. Por lo que si la fuente de luz fuera un mero punto matemático, parece posible que la distancia pudiera ser incrementada sin límite...

Las observaciones de Talbot, pese a ser meramente cualitativas, fueron la primera mención de lo que hoy llamamos el efecto de Talbot, descrito gráficamente en la figura 2.

Al parecer, los experimentos de Talbot pasaron desapercibidos durante varios años. No fue sino hasta 1881 cuando John William Strutt, tercer barón de Rayleigh (más conocido como Lord Rayleigh) trató de nuevo el fenómeno en su artículo «On Copying Diffraction-gratings, and on some Phenomena connected therewith» [6]. Tras reproducir el experimento de Talbot, llevó a cabo un exhaustivo análisis de los resultados, tratando de darle una explicación teórica. Sin embargo, se podría deducir de la lectura del artículo que la intención de Rayleigh no era esa. Más bien, como sugiere el propio nombre del artículo, pretendía en un principio obtener copias de rejillas de difracción originales. Aunque lo parezca, no es para nada

un objetivo trivial, dado el gran número de hendiduras en cada rejilla. A lo largo del artículo, Rayleigh asegura que «en verano de 1879 se me presentó la oportunidad de llevar mis hipótesis a la práctica gracias a la amabilidad del señor Rutherford, quien me obsequió con una maravillosa rejilla de cristal con unas 12 000 hendiduras, a 6800 por centímetro». Dicho sea de paso que esta frase nos muestra la magnitud microscópica del experimento: en efecto, la distancia entre las hendiduras mencionada anteriormente es *mu*y pequeña. Mientras Rayleigh, en el mismo artículo [6], se enfrenta a numerosos problemas técnicos para obtener una copia satisfactoria, escribe:

El verano pasado descubrí accidentalmente que Fox Talbot había hecho unas observaciones parecidas varios años atrás, y su detenido estudio me llevó a variar ligeramente el enfoque de mis procedimientos.

Inmediatamente después reproduce el experimento de Talbot, con la salvedad de hacer sus observaciones a través de algunos cristales de color rojo y verde frente a sus ojos. Esto le permite observar el experimento como si la luz emitida fuera monocromática roja o verde, y así realizar un análisis para una sola longitud de onda, la propia de cada color. Tras observar el mismo fenómeno que Talbot, registra las distancias, tanto para la luz roja como para la verde, en las que la rejilla se reproduce más y menos nítidamente. Después, deduce tras varios cálculos que, tal y como Talbot conjeturó, existe una distancia z_T en la que la rejilla es reproducida con altísima precisión. Incluso es capaz de formular una expresión explícita para ella,

$$(1) \quad z_T = \frac{\lambda}{1 - \sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{d^2}}},$$

donde λ es la longitud de onda y d es la separación de las hendiduras de la rejilla. Cuando la longitud de onda es considerablemente menor que la distancia entre las hendiduras, es decir, cuando $\lambda \ll d$, es aceptable truncar la expansión en serie de Taylor de la raíz cuadrada en (1), $\sqrt{1 - x^2} = 1 - x^2/2 - x^4/8 + \dots$, a partir de la cuarta potencia. Esto nos permite simplificar la expresión (1), consiguiendo

$$(2) \quad z_T = \frac{2d^2}{\lambda}.$$

Gracias a estos cálculos, es posible copiar una rejilla colocando un material fotosensible a distancia z_T , logrando así el objetivo que Rayleigh perseguía. También, como curiosidad, la fórmula (2) permite deducir fácilmente la longitud de onda de diferentes luces monocromáticas midiendo la distancia de Talbot de manera experimental.

Los cálculos de Rayleigh son completamente analíticos, aunque hay momentos en los que se vale de algunas aproximaciones, y se basan en la expresión matemática explícita del comportamiento de las ondas planas cuando atraviesan una rejilla, que Rayleigh trata en su libro *The Theory of Sound* [7].

El artículo está organizado de la siguiente forma. En la sección 2 deduciremos la aproximación de la distancia de Talbot (2) por medio de argumentos físicos bastante intuitivos que permitirán hacernos una idea clara de lo que Rayleigh desarrolla. A continuación, en la sección 3 trataremos de plasmar las ideas principales del mencionado razonamiento de Rayleigh. Finalmente, en la sección 4 veremos que el efecto de Talbot no es un fenómeno exclusivo de la luz, sino que también se reproduce en ciertas soluciones de la ecuación de Schrödinger cuando tomamos como dato inicial un modelo de la rejilla mencionada.

2. Una primera aproximación a la distancia de Talbot

El objetivo de esta sección es deducir la existencia de la distancia de Talbot (en su versión aproximada (2)) mediante argumentos físicos, que son muy visuales y permiten comprender mejor las razones por las que el fenómeno ocurre. Seguiremos los argumentos presentados en el blog *Skulls in the Stars* [9].

El efecto de Talbot es, como mencionamos al comienzo, un fenómeno de difracción y lo explicaremos por medio de lo que se conoce como el **principio de Huygens**. Para ello, necesitamos definir ciertos conceptos. La **fase** de una onda en un punto es la fracción de un ciclo completo en el que la onda se encuentra con

respecto a un punto de referencia. Un **frente de onda** es el conjunto de puntos adyacentes que tienen la misma fase. Por ejemplo, los círculos y las líneas debajo de la pared en la figura 1 representan frentes de onda. Según el principio de Huygens, todo punto en un frente de onda de una onda particular se comporta como fuente de una onda esférica con las mismas propiedades que la onda original (con la misma longitud de onda y velocidad, entre otras). Esta ley lleva el nombre del físico holandés Christiaan Huygens (1629-1695), quien la describió por primera vez en su libro *Traité de la lumière* [5]. Este principio es especialmente útil cuando consideramos la situación de la rejilla descrita anteriormente. En efecto, si una onda plana se dirige perpendicularmente hacia una rejilla, cada una de las hendiduras se comportará como fuente de una onda esférica, como se muestra en la figura 3.

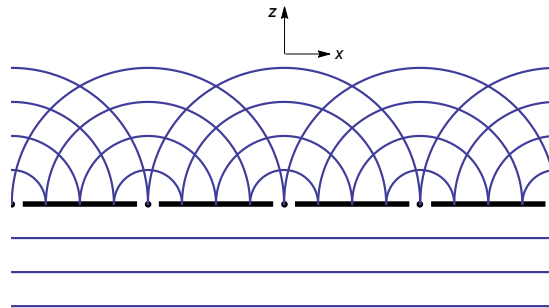


Figura 3: El principio de Huygens: una onda plana pasando a través de una rejilla genera ondas esféricas.

Por lo tanto, la superposición de cada una de estas ondas esféricas determinará la onda resultante del paso por la rejilla. En consecuencia, analizaremos la interacción entre las nuevas ondas, intentando detectar los nuevos frentes de onda que se generan. Antes de entrar en los razonamientos, enumeramos algunas definiciones y propiedades razonables que supondremos ciertas:

- La **longitud de onda** (es decir, la longitud de un ciclo completo de la onda) de la luz determina su color, y viceversa. Por lo tanto, como hizo Lord Rayleigh, trabajaremos con una luz monocromática, de tal manera que la longitud de onda sea constante. La denotaremos como λ .
- La fase de la onda viene dada por $2\pi y/\lambda$, donde y es la distancia recorrida por la onda respecto a algún punto de referencia. Se mide en radianes (módulo 2π). Definimos el **número de onda** como $k = 2\pi/\lambda$, por lo que la expresión para la fase es ky .
- La rejilla que Talbot describe en su artículo es «una plancha de cristal con varios centenares de hendiduras paralelas». Por lo tanto, podemos reducir el problema a un contexto bidimensional, en el plano cuyo vector normal viene dado por la dirección de las hendiduras. Así, la rejilla se convierte en una rejilla unidimensional, como la que se muestra en la figura 3, donde x es la dirección de la rejilla y z es la dirección perpendicular. Situaremos la rejilla en $z = 0$.
- Las hendiduras de la rejilla estarán separadas de manera equidistante y la distancia entre dos sucesivas aperturas será d . Además, a pesar de que la separación d de la rejilla de Rutherford era del orden de 10^{-6} metros, la longitud de onda de la luz visible es del orden de 10^{-7} metros, y la separación en la de Talbot sería bastante mayor. Por eso, podemos considerar $\lambda \ll d$.

Analicemos, pues, la interferencia entre las ondas esféricas generadas en cada una de las hendiduras. Como hemos dicho, queremos determinar frentes de onda que se generan tras el paso por la rejilla. Para una mejor comprensión, en la figura 4 mostramos algunos de estos frentes. En la imagen, la separación entre dos frentes consecutivos generados en una misma apertura es precisamente λ .

Para empezar, es fácil distinguir una línea recta paralela a la rejilla que es tangente a todos los frentes con radio $j\lambda$, para cada $j \in \mathbb{N}$ (en la figura 4a). Tomemos ahora un punto de hendidura $(S, 0)$, el frente de radio λ generado en la siguiente hendidura $(S + d, 0)$, el de radio 2λ creado en $(S + 2d, 0)$, y así sucesivamente. Es fácil ver mediante argumentos geométricos básicos que la recta que parte de $(S, 0)$ y que es tangente al frente de radio λ mencionado también es tangente a todos los demás frentes (figura 4b). En esa imagen, las líneas rojas son tangentes a todas las circunferencias consideradas en cada caso. De la misma manera,

si tomamos el frente con centro en $(S + d, 0)$ y radio 2λ , el centrado en $(S + 2d, 0)$ con radio 4λ y los que siguen, podemos dibujar una nueva recta tangente a cada uno de los frentes señalados, más inclinada que la anterior (figura 4c).

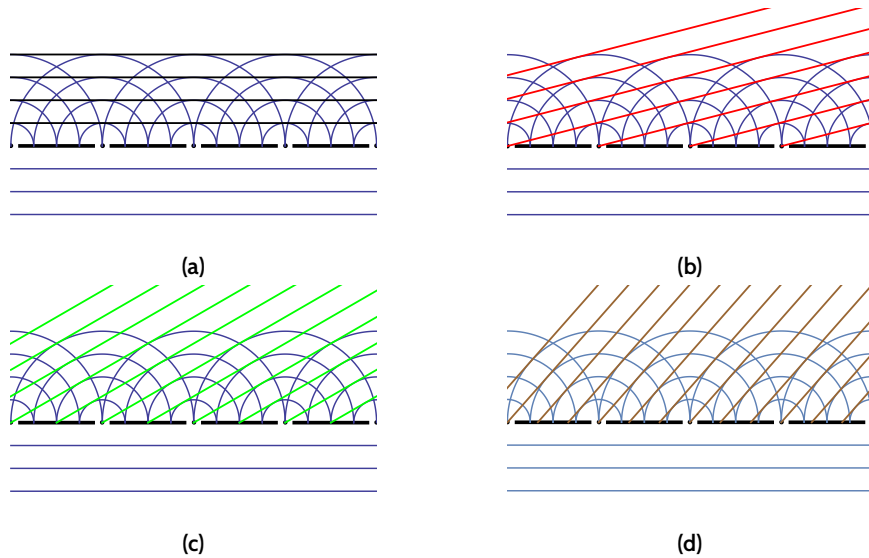


Figura 4: La creación de diferentes frentes de onda.

En cada imagen, cada línea define un nuevo frente de onda de una onda plana, que viaja en una dirección particular. Estas direcciones están determinadas por el ángulo θ entre el frente y la rejilla. Además, la superposición de todas estas ondas planas será la onda resultante del paso por la rejilla.

Si continuamos dibujando frentes de onda con este método, al ser los frentes circulares cada vez más grandes, llegará un momento en el que la apertura quedará dentro del círculo que consideremos, por lo que no existirá la tangente de la que estamos hablando. Por lo tanto, la cantidad de direcciones para los nuevos frentes es finita y, además, los ángulos correspondientes cumplirán $\theta \leq \pi/2$.

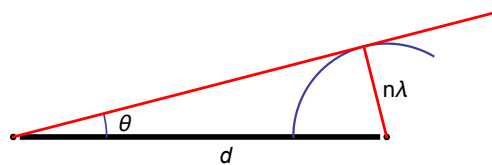


Figura 5: La determinación del ángulo θ correspondiente a un frente de onda.

En la figura 4 podemos distinguir fácilmente la situación que mostramos en la figura 5. Cada dirección de los frentes de onda corresponde a un valor $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Por ejemplo, la figura 4a corresponde a $n = 0$. Asimismo, las figuras 4b, 4c y 4d corresponden a los valores $n = 1$, $n = 2$ y $n = 3$, respectivamente. Además, el triángulo dibujado en la figura 5 es rectángulo para todo n , por lo que

$$\sin \theta = \frac{n\lambda}{d}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Como hemos dicho, θ no puede ser arbitrario. Un ángulo $\theta = \pi/2$ tendría un seno igual a 1, que correspondería al valor $n^* = d/\lambda$. Entonces, n debe ser menor que n^* , y como es entero, vemos que podemos escoger valores

$$(3) \quad n = 0, 1, 2, \dots, \left\lfloor \frac{d}{\lambda} \right\rfloor.$$

Estos valores representan los frentes que se desplazan hacia la izquierda o hacia delante. Pero también debemos tener en cuenta los frentes que se dirigen hacia la derecha, dado que de la misma manera que en la figura 4 hemos tomado centros $(S, 0)$, $(S + d, 0)$, $(S + 2d, 0)$, \dots para construir los diferentes frentes, podemos tomar centros en $(S, 0)$, $(S - d, 0)$, $(S - 2d, 0)$, \dots . Por lo tanto, el número de direcciones para los frentes de onda que debemos considerar es $2 \lfloor d/\lambda \rfloor + 1$. Cada $n \in \{-\lfloor d/\lambda \rfloor, \dots, -1, 0, 1, \dots, \lfloor d/\lambda \rfloor\}$ corresponderá a una de estas direcciones.

Los realizados hasta ahora son cálculos preliminares que necesitamos para deducir la distancia de Talbot, que se mide en el eje z . Para ello, vamos a descomponer la onda en partes perpendiculares y paralelas a la rejilla, y nos centraremos en la fase de la onda en la dirección perpendicular z . Si encontramos una distancia en la que la fase de todos los frentes de onda sea la misma, entonces la luz recibida allí será idéntica a la emitida por la rejilla, dado que en la rejilla, la cual tomamos como referencia, todos los frentes de onda están en fase cero. Como consecuencia, se producirá el efecto de Talbot. ¿Pero qué significa la fase en la dirección z si hemos visto que los frentes de onda están generalmente inclinados? Fijemos una dirección en la figura 5 de tal manera que el frente de ondas no sea paralelo a la rejilla (es decir, un $n \neq 0$). Si fijamos un x en la rejilla, lo que tenemos en la dirección z es una onda que tendrá una longitud de onda, λ_z , diferente a la original. Del mismo modo, si fijamos z , una onda viaja en la dirección x con una longitud de onda λ_x , tal y como se muestra en la figura 6.

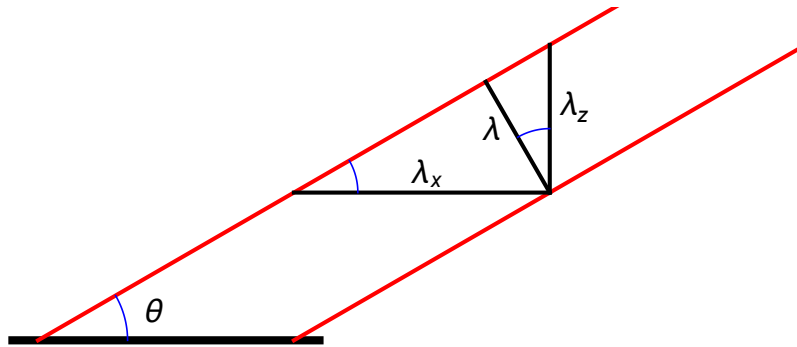


Figura 6: La descomposición de la longitud de onda λ correspondiente a una dirección particular de los frentes con $n \neq 0$.

La rejilla es equidistante con separación d . Por lo tanto, se deduce inmediatamente que para cada z fijo, la onda que viaja en la dirección x tendrá un periodo espacial d , dado que dos puntos separados por una distancia d están en la misma situación con respecto a la rejilla. Por otro lado, el periodo espacial de la onda es precisamente λ_x (que por definición es el mínimo periodo), por lo que necesariamente

$$(4) \quad m\lambda_x = d$$

para algún $m \in \mathbb{N}$. Además, tal y como observamos en la figura 4, $m = |n|$.

Por otro lado, también es inmediato ver que $\lambda = \lambda_x \sin \theta$ y $\lambda = \lambda_z \cos \theta$, dado que los ángulos marcados en la figura 6 son iguales a θ . De ahí deducimos que

$$(5) \quad \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda_x^2} + \frac{1}{\lambda_z^2}.$$

Como decíamos, queremos trabajar con la fase en z , considerando como referencia la propia rejilla en $z = 0$. Calculemos el número de onda en esa dirección. Por (4) y (5) tenemos

$$k_z = \frac{2\pi}{\lambda_z} = 2\pi \sqrt{\frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda_x^2}} = 2\pi \sqrt{\frac{1}{\lambda^2} - \frac{n^2}{d^2}} = \frac{2\pi \sqrt{1 - n^2 \lambda^2 / d^2}}{\lambda},$$

y por lo tanto, la fase es

$$(6) \quad zk_z = \frac{2\pi z}{\lambda} \sqrt{1 - \frac{n^2 \lambda^2}{d^2}}.$$

Es importante observar que cuando $n = 0$, tenemos $\lambda = \lambda_z$ y $\lambda_x = 0$, por lo que $k_z = k$ y $zk_z = 2\pi z/\lambda$, que es precisamente lo que nos diría la ecuación (6). Por lo tanto, la fórmula (6) es válida para todo valor de n .

En este momento, necesitamos hacer algunas aproximaciones. En efecto, conocemos la serie de Taylor de la raíz cuadrada que se muestra en (6), dado que

$$\sqrt{1-x^2} = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{1/2}{j} (-1)^j x^{2j} = 1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} - \dots, \quad \text{cuando } x < 1.$$

Para valores de n pequeños, $n\lambda/d \ll 1$, dado que $\lambda \ll d$, y por ello, tomando los dos primeros términos de la serie, podemos aproximar la fase por medio de

$$\frac{2\pi z}{\lambda} \left(1 - \frac{n^2 \lambda^2}{2d^2} \right) = \frac{2\pi z}{\lambda} - 2\pi \frac{z \lambda n^2}{2d^2}.$$

En principio, para valores de n grandes, tenemos $n\lambda/d \sim 1$ y la aproximación realizada es demasiado imprecisa. Pero volviendo a la figura 4, los valores grandes de n corresponden a frentes muy inclinados que, en comparación con los más horizontales, no contribuirán mucho (dado que en una rejilla de longitud finita los frentes más inclinados tienen poco recorrido en la dirección z , que es la que nos interesa) y los podemos despreciar. Por ello, podemos dar por válida la aproximación anterior. Nótese que solo el segundo término depende de n . Además, si consideramos el punto z para el que

$$(7) \quad \frac{z\lambda}{2d^2} = 1,$$

entonces la dependencia en n desaparece porque logramos un múltiplo de 2π . En consecuencia, si se satisface (7), todos los frentes de onda tienen la misma fase con respecto a $z = 0$. Como hemos dicho, en $z = 0$ y en tiempo $t = 0$ todos los frentes están en fase 0. La fase, por supuesto, cambia con el tiempo, pero siempre será la misma para todos los frentes. Por lo tanto, lo que vemos es que esta situación se reproduce cuando (7) se cumple. En otras palabras, una pantalla situada en el punto z determinado por (7) recibe el mismo patrón de luz que el que se ha emitido desde $z = 0$. O si miráramos desde esa distancia hacia la rejilla, veríamos precisamente las hendiduras de esta.

Así pues, la distancia dada por la condición (7), que es

$$z = z_T = \frac{2d^2}{\lambda},$$

es la distancia de Talbot, distancia en la que el fenómeno descrito al principio ocurre. Coincide, precisamente, con la expresión aproximada (2) dada por Lord Rayleigh.

Es interesante observar que la elección de cualquier múltiplo de la distancia de Talbot lleva a la misma conclusión. Por lo tanto, la rejilla se reproduce una y otra vez cada vez que alejamos el punto de observación z_T unidades de espacio. Se podría decir que la luz se comporta como una copia de la rejilla original en cada punto $z = l z_T$ con $l \in \mathbb{N}$.

3. El razonamiento de Lord Rayleigh

En esta sección desarrollaremos unos cálculos con un mayor nivel de corrección. Nos basaremos en la argumentación de Lord Rayleigh en su artículo [6] y en su libro *The Theory of Sound* [7].

Nuestro punto de partida es la conocida **ecuación de ondas**, que podemos expresar como

$$(8) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \Delta u, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0,$$

donde $u = u(\mathbf{x}, t)$ representa el desplazamiento de la onda en el punto \mathbf{x} y en el momento t respecto a un punto de referencia, c representa la velocidad con la que la onda viaja y Δ es el operador laplaciano.

Usualmente se añade al problema una condición inicial correspondiente al tiempo $t = 0$, y viene dada por una función $u(\mathbf{x}, 0) = u_0(\mathbf{x})$ para $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Tiene sentido trabajar con esta ecuación, dado que estamos tratando un fenómeno de la luz, que no deja de ser una onda.

Como venimos haciendo, trabajaremos con dos dimensiones espaciales que llamaremos (x, z) y consideramos la rejilla equidistante en $z = 0$. El dominio a analizar es, pues, el semiplano superior $z > 0$. Lo primero que queremos ver es que no será necesario estudiar la situación en todo el semiplano, sino que nos podremos reducir a un dominio más pequeño. Observamos primero, como ya hemos mencionado anteriormente en la sección 2, que dado que el origen de las ondas es la rejilla equidistante con separación d , la solución que buscamos debe ser periódica en x con periodo d . Esto se cumple dado que la ecuación de ondas (8) es invariante por translaciones; es decir, si $u(x, t)$ es solución, $u(x + d, t)$ también lo será. Tienen dato inicial $u(x, 0)$ y $u(x + d, 0)$ respectivamente. Nuestra rejilla juega el papel de dato inicial, por lo que al ser equidistante, podemos suponer que el dato inicial será periódico de periodo d . En consecuencia, los datos mencionados son idénticos. La unicidad de la solución para un dato inicial dado muestra entonces que $u(x, t) = u(x + d, t)$ y por lo tanto la periodicidad de nuestra solución. Gracias a ello, bastará con analizar la solución en la franja $0 \leq x \leq d$.

Pero podemos decir más aún. Por ejemplo, si trazamos una línea vertical en una apertura de la rejilla, observamos en la figura 7a que la velocidad transversal de la onda es nula: las componentes horizontales de la velocidad se anulan entre sí, resultando una velocidad vertical. Lo mismo ocurre en los puntos medios entre las aperturas (figura 7b). De estas propiedades podemos deducir dos hechos:

- La velocidad transversal (es decir, en la dirección x) en las líneas $x = 0$, $x = d/2$ y $x = d$ es nula, por lo que

$$(9) \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0, z, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(d/2, z, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(d, z, t) = 0, \quad \forall z > 0, \forall t > 0.$$

- La solución es par con respecto a la «pared» marcada en $x = d/2$. Y es que si tomamos un $x_0 > 0$, la situación del punto $(d/2 - x_0, z)$ respecto a $(0, 0)$ y a $(d/2, 0)$ es exactamente la misma que la situación de $(d/2 + x_0, z)$ respecto a $(d, 0)$ y $(d/2, 0)$ respectivamente. Se da, por tanto, una simetría respecto a la línea $x = d/2$.

Gracias a estos argumentos, bastará con resolver el problema para la franja $0 \leq x \leq d/2$. De esta solución parcial podremos recuperar la solución completa extendiéndola primero de manera par a $0 \leq x \leq d$ y después de manera periódica a toda la recta. Esto se puede comprobar analíticamente gracias a las condiciones sobre $\partial u / \partial x$ (9) y a la invarianza de la ecuación ondas (8) respecto a traslaciones y reflexiones pares.

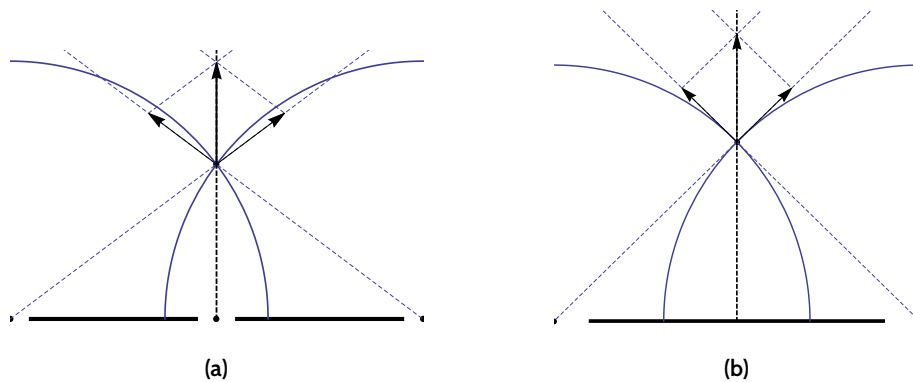


Figura 7: Las «paredes» del experimento de Talbot.

Por lo tanto, hemos conseguido reducirnos al problema

$$(10) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \Delta u, & 0 \leq x \leq d/2, \quad z > 0, \quad t > 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, z, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(d/2, z, t) = 0, & z > 0, \quad t > 0. \end{cases}$$

Lo resolveremos mediante el método de separación de variables. Si escribimos $u(x, z, t) = v(x, z)T(t)$, logramos

$$(11) \quad v(x, z)T''(t) = c^2 \Delta v(x, z)T(t) \iff \frac{T''(t)}{c^2 T(t)} = \frac{\Delta v(x, z)}{v(x, z)} = -\mu,$$

donde $\mu \in \mathbb{R}$ es una constante, dado que una igualdad entre funciones en variables distintas implica que ambas son constantes. Para la variable temporal tenemos una ecuación de segundo grado que depende del signo de μ . En efecto, si $\mu < 0$, las soluciones son exponenciales, y si $\mu = 0$ son lineales. No nos interesan, dado que una onda no se comporta de esa manera. En cambio, si $\mu > 0$, entonces la solución oscila. Más concretamente, tenemos

$$T(t) = Ae^{ic\sqrt{\mu}t} + Be^{-ic\sqrt{\mu}t}$$

para ciertas constantes A y B . Si llamamos $\mu = k^2$ (veremos más adelante que k será precisamente el número de onda), entonces podemos tratar la solución como

$$(12) \quad T(t) = Ae^{ickt} + Be^{-ickt} := e^{\pm ickt}, \quad \text{o} \quad T(t) = A \cos(ckt) + B \sin(ckt).$$

Para las variables espaciales, en las ecuaciones (11) vemos que

$$(13) \quad \Delta u(x, z) + k^2 u(x, z) = 0.$$

A la ecuación (13) se la llama **ecuación de Helmholtz**, y es una versión estacionaria de la ecuación de ondas. Volvamos a separar variables escribiendo $v(x, z) = X(x)Z(z)$, de tal manera que después de dividirla por u , la ecuación (13) se convierte en

$$(14) \quad -\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{Z''(z)}{Z(z)} + k^2 = \eta,$$

donde de nuevo η es una constante, porque volvemos a tener una igualdad entre funciones de variables distintas. Las condiciones sobre la $\partial u / \partial x$ se convierten en $X'(0) = X'(d/2) = 0$.

Observamos primero que la ecuación para X es la misma que para T (salvo sustitución de $c^2\mu$ por η), por lo que también depende del signo de η . Si $\eta < 0$, las soluciones son exponenciales, y es fácil ver que las condiciones de contorno mencionadas fuerzan a que la solución sea nula, solución que no nos interesa. Si $\eta = 0$, entonces la solución es de la forma $X(x) = Ax + B$ para ciertas constantes A y B . En este caso, las condiciones de contorno fuerzan que $A = 0$, por lo que la solución es constante. En cambio, si $\eta > 0$, siguiendo los mismos pasos que para lograr las expresiones (12) y llamando $\eta = j^2$, tenemos $X(x) = A \cos(jx) + B \sin(jx)$ con A y B constantes. La condición $X'(0) = 0$ implica que $B = 0$. Como consecuencia, $0 = X'(d/2) = -jA \sin(jd/2)$, por lo que se debe cumplir que $jd/2 = p\pi$ con $p \in \mathbb{Z}$. El caso $\eta = 0$ se incluye en $p = 0$. Así pues, tenemos soluciones distintas para cada valor de $p \in \mathbb{Z}$, que denotamos por

$$(15) \quad X_p(x) = A_p \cos\left(\frac{2\pi px}{d}\right),$$

donde A_p es una constante para cada valor de p .

Centrémonos ahora en la ecuación (14) para Z , que vuelve a ser igual a la de T una vez sustituida la constante $c^2\mu$ por $k^2 - \eta = k^2 - j^2$. Así pues, las soluciones que nos interesan son aquellas con $k^2 - j^2 \geq 0$. Utilizando la caracterización de j en función de p , definimos

$$(16) \quad v_p^2 = k^2 - \frac{4\pi^2 p^2}{d^2} \geq 0.$$

Con esta notación, al igual que en la expresión (12), tenemos $Z_p(z) = e^{\pm iv_p z}$. Si juntamos esto con las expresiones (12) y (15) que hemos obtenido para X y T , logramos un conjunto de soluciones

$$(17) \quad u_p(x, z, t) = B_p e^{\pm iv_p z} e^{\pm ickt} \cos\left(\frac{2\pi px}{d}\right)$$

para los valores de p determinados por la condición (16), donde B_p es constante para cada p .

Una primera simplificación consiste en darse cuenta de que v_p depende de p^2 y de que el coseno es una función par. Por ello, $u_p = u_{-p}$, y nos podemos limitar a $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Los signos \pm de la expresión (17) se pueden determinar. Y es que si tomáramos la exponencial con $ckt + v_p z$, entonces será constante en rectas de la forma $ckt + v_p z = c$. Aquí, cuando t crece, z decrece, así que esta expresión determina una onda que viaja hacia atrás, al igual que la expresión con $-ckt - v_p z$. Pero nuestra onda, que viaja en z , va hacia adelante dado que estamos considerando una pared en $z = 0$. Por ello, nos quedamos con las formas $\pm(ckt - v_p z)$.

Al tener el conjunto de soluciones u_p para $p = 0, 1, 2, \dots$, la linealidad de la ecuación nos permite trabajar con la suma de todas ellas como solución. Así, escribiéndola en su forma real, logramos

$$(18) \quad u(x, z, t) = \sum_{p \leq kd/2\pi} (C_p \cos(ckt - v_p z) + D_p \sin(ckt - v_p z)) \cos\left(\frac{2\pi p x}{d}\right),$$

donde la suma recorre los números enteros no negativos y C_p y D_p son constantes para cada p .

La expresión (18) deja al descubierto las razones de nombrar a k así. Se ve que ck es la frecuencia de la onda. Dicho de otro modo, si T es el periodo, entonces $k = 2\pi/(cT)$. Por definición, $cT = \lambda$ es la longitud de onda, por lo que k es el número de onda. Adecuando con esta notación la cota de la suma, logramos

$$(19) \quad u(x, z, t) = \sum_{p \leq d/\lambda} (C_p \cos(ckt - v_p z) + D_p \sin(ckt - v_p z)) \cos\left(\frac{2\pi p x}{d}\right).$$

Mientras que la longitud de onda determina el color de la luz, es la amplitud la que marca su intensidad. Por lo tanto, estamos interesados en calcular la amplitud de la onda, que será el máximo de nuestra función (19). Fijando un punto espacial (x, z) , tratémosla como función del tiempo $u(t)$. Un simple vistazo a su forma nos dice que no será fácil maximizarla igualando su derivada a cero. Pero de la misma manera que en la expresión (11), se ve que $u''(t) + c^2 k^2 u(t) = 0$. Si multiplicamos la ecuación por $u'(t)$, formando derivadas logramos $[(u')^2]' + c^2 k^2 (u^2)' = 0$, por lo que

$$(20) \quad [u'(t)]^2 + c^2 k^2 u(t)^2 = C$$

para alguna constante C y para todo $t \in \mathbb{R}$. Si tomamos un punto t_0 que maximice la función, es decir, con $u'(t_0) = 0$, entonces en (20) vemos que el valor de la función es $u(t_0)^2 = C/c^2 k^2$, que será precisamente el cuadrado del máximo. Pero C viene determinada en la propia igualdad (20), por lo que llamando A a la amplitud, logramos

$$(21) \quad A^2 = u(t_0)^2 = u(t)^2 + \frac{1}{c^2 k^2} [u'(t)]^2.$$

Tras varios cálculos utilizando la fórmula (21), la expresión (19) y alguna identidad trigonométrica básica para lograr la amplitud de nuestra onda, veremos que

$$A^2 = C_0^2 + D_0^2 + 2[(C_0 C_1 + D_0 D_1) \cos(kz - v_1 z) + (C_0 D_1 - C_1 D_0) \sin(kz - v_1 z)] \cos\left(\frac{2\pi x}{d}\right) + (C_1^2 + D_1^2) \cos^2\left(\frac{2\pi x}{d}\right) + \dots,$$

donde solo hemos desarrollado los términos que conciernen exclusivamente a los índices $p = 0$ y $p = 1$. En este momento, Lord Rayleigh considera que es suficiente quedarse con estos términos como aproximación. Dicha aproximación resulta ser periódica en z con periodo Z determinado por $(k - v_1)Z = 2\pi$. Resolviendo para Z logramos

$$Z = \frac{2\pi}{k - v_1} = \frac{2\pi}{\frac{2\pi}{\lambda} - \sqrt{\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 - \frac{4\pi^2}{d^2}}} = \frac{\lambda}{1 - \sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{d^2}}},$$

que es precisamente la expresión (1) que dimos al principio.

Los cálculos realizados muestran la existencia de la distancia de Talbot, y además nos ofrecen una expresión explícita para ella. Sin embargo, si uno mira la alfombra de Talbot de la figura 2, se dará cuenta de que

el fenómeno es más complejo de lo que hemos deducido. Obsérvese que la distancia de Talbot, z_T , es precisamente la anchura de la imagen, y es en el extremo derecho donde la rejilla original de la parte izquierda se repite. Pero en puntos intermedios, hay muchos patrones fácilmente distinguibles. Por ejemplo, en $z = z_T/2$, la rejilla se repite salvo por el hecho de que está trasladada por una distancia de $d/2$. En $z = z_T/4$, la rejilla se ha duplicado y ahora tiene una separación de $d/2$. Y en un tercio de la distancia de Talbot, la rejilla se ha triplicado, pasando a tener un tercio de la separación original.

Esta imagen muestra que el efecto de Talbot no solo consiste en la repetición de la rejilla en la distancia z_T , sino que genera infinidad de imágenes autosemejantes de la rejilla original, en diferentes distancias y con diferentes separaciones. Estas observaciones nos podrían hacer pensar en fractales. De hecho, en 1996 (más de 100 años después de los avances de Lord Rayleigh y más de 150 años después que Talbot), M.V. Berry y S. Klein mostraron en su artículo «Integer, fractional and fractal Talbot effects» [2] que la alfombra de Talbot posee una estructura fractal.

4. El efecto de Talbot en la ecuación de Schrödinger

En las secciones anteriores hemos deducido el efecto de Talbot mediante distintos métodos en el caso de un rayo de luz que atraviesa una rejilla. En lo que sigue veremos que la ecuación de Schrödinger, que modeliza el comportamiento de un sistema cuántico que presenta un comportamiento ondulatorio, también reproduce el efecto de Talbot, como muestran F. de la Hoz y L. Vega en su artículo [4].

El problema del valor inicial para la **ecuación libre de Schrödinger** es

$$(22) \quad \begin{cases} u_t(\mathbf{x}, t) = i\Delta u(\mathbf{x}, t), & \text{para } (\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \\ u(\mathbf{x}, 0) = u_0(\mathbf{x}), & \text{para } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

donde u_t representa la derivada en tiempo de la función u . Aquí, i es la unidad imaginaria, Δ el operador laplaciano y la función u representa la función de onda del sistema cuántico en cuestión.

En esta sección trabajaremos en el caso unidimensional $n = 1$ y con la conocida **invarianza galileana**. Si la denotamos como G , esta invarianza viene dada por

$$(23) \quad Gu(x, t) = e^{i\lambda x - i\lambda^2 t} u(x - 2\lambda t, t), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

La invarianza galileana es una simetría de la ecuación de Schrödinger; es decir, si u es una solución de la ecuación, entonces Gu también lo es. Esto se puede comprobar fácilmente a mano. En particular, evaluando la expresión (23) en $t = 0$, la invarianza galileana para el dato inicial es

$$(24) \quad Gu_0(x) = e^{i\lambda x} u_0(x).$$

Una interesante utilidad de las simetrías consiste en considerar datos iniciales invariantes. En efecto, si consideramos un dato u_0 para el que $Gu_0 = u_0$, entonces dado que u y Gu resuelven el sistema (22), la unicidad de soluciones de la ecuación implica que $Gu = u$, obteniendo una ecuación para la solución. En el caso de la invarianza galileana, uno de los casos más sencillos es considerar la distribución delta de Dirac como dato inicial, que genera la solución fundamental de la ecuación de Schrödinger, la cual denotaremos como $U(x, t)$ (la delta de Dirac se puede representar intuitivamente como una *función* que vale ∞ en $x = 0$ y 0 en todo otro punto y que cumple $\int_{\mathbb{R}} \delta = 1$. Se puede encontrar información accesible sobre la teoría de distribuciones y soluciones fundamentales en los capítulos 2 y 3 del libro de Vladimirov [11] y también en el capítulo 6 del libro de Cerdà [3]). Así, como $G\delta = \delta$, las soluciones generadas por ambos datos son iguales y, por lo tanto,

$$GU(x, t) = U(x, t), \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

En otras palabras,

$$U(x, t) = e^{i\lambda x - i\lambda^2 t} U(x - 2\lambda t, t), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Recordemos que en el experimento de Talbot tenemos una rejilla periódica con hendiduras separadas por una distancia d . Si pensáramos en esta rejilla como el dato inicial de la ecuación de Schrödinger, podríamos identificar cada una de las aperturas con una delta de Dirac, de tal manera que tendríamos

$$(25) \quad u_0(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta(x - kd).$$

Este dato representa deltas separadas por una distancia d y, por lo tanto, es periódico de periodo d . Además, vemos que para todo $m \in \mathbb{Z}$,

$$e^{2\pi i m \frac{x}{d}} u_0(x) = u_0(x),$$

lo cual indica que (25) no varía mediante una cierta invarianza galileana. Esta igualdad se cumple dado que en puntos $x \neq ld$ con $l \in \mathbb{Z}$ la función es cero, y en puntos $x = ld$ el valor de la exponencial es 1. Por lo tanto, si u es la solución correspondiente, por (23) y (24) con $\lambda = 2\pi m/d$ tenemos que

$$(26) \quad u(x, t) = e^{2\pi i \frac{m}{d} x - 4\pi^2 i \frac{m^2}{d^2} t} u(x - 4\pi m t/d, t)$$

para todo $m \in \mathbb{Z}$.

Asimismo, es importante observar que, al igual que vimos en la sección 3, gracias a que la ecuación de Schrödinger es invariante por translaciones y a la unicidad de soluciones, el hecho de que el dato inicial sea periódico implica que la solución también lo será en su variable espacial x . Por lo tanto, gracias a esta periodicidad, podemos trabajar con series de Fourier. Consideremos el j -ésimo coeficiente de u , que es

$$(27) \quad \widehat{u}(j, t) = \frac{1}{d} \int_0^d u(x, t) e^{-2\pi i \frac{j}{d} x} dx.$$

Utilizando (26), cambiando de variables $x \rightarrow x + 4\pi m t/d$ y por la periodicidad, podemos decir que

$$\begin{aligned} \widehat{u}(j, t) &= \frac{1}{d} \int_0^d e^{2\pi i \frac{m}{d} x - 4\pi^2 i \frac{m^2}{d^2} t} u(x - 4\pi m t/d, t) e^{-2\pi i \frac{j}{d} x} dx \\ &= \frac{1}{d} \int_0^d e^{2\pi i \frac{m-j}{d} (x+4\pi m t/d) - 4\pi^2 i \frac{m^2}{d^2} t} u(x, t) dx \\ &= \frac{1}{d} e^{8\pi^2 i m \frac{m-j}{d^2} t - 4\pi^2 i \frac{m^2}{d^2} t} \int_0^d e^{2\pi i \frac{m-j}{d} x} u(x, t) dx \\ &= e^{8\pi^2 i m \frac{m-j}{d^2} t - 4\pi^2 i \frac{m^2}{d^2} t} \widehat{u}(j - m, t). \end{aligned}$$

Al ser esta ecuación válida para cualesquiera $j, m \in \mathbb{Z}$, tomemos $j = m$ para obtener

$$\widehat{u}(j, t) = e^{-4\pi^2 i \frac{j^2}{d^2} t} \widehat{u}(0, t)$$

y así poder escribir la serie de Fourier de u como

$$(28) \quad u(x, t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{u}(k, t) e^{2\pi i \frac{k}{d} x} = \widehat{u}(0, t) \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{2\pi i (\frac{k}{d} x - 2\pi \frac{k^2}{d^2} t)}.$$

Esta es la expresión que nos permitirá detectar el efecto de Talbot. Primero observamos que la última suma en (28) cumple la ecuación del problema (22), lo cual implica que $\widehat{u}(0, t)$ debe ser constante como función de t . En particular, $\widehat{u}(0, t) = \widehat{u}(0, 0)$. Es bien sabido, y fácil de ver en (27), que el coeficiente 0 de Fourier de la solución u no es más que la integral de su dato inicial multiplicada por el inverso de su periodo, por lo que

$$\widehat{u}(0, t) = \widehat{u}(0, 0) = \frac{1}{d} \int_0^d u(x, 0) dx = \frac{1}{d}.$$

Esto se cumple porque en un periodo integramos una sola delta de Dirac, cuya integral es 1. Por otro lado, podemos deducir una identidad importante si miramos el dato inicial en (28). Y es que evaluando $t = 0$ obtenemos

$$(29) \quad \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta(x - kd) = u(x, 0) = \frac{1}{d} \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{2\pi i \frac{k}{d} x}.$$

Haremos uso de esta identidad más adelante.

La propia expresión (28) muestra que u es periódica en t de periodo $d^2/2\pi$, y por lo tanto volvemos a ver el dato inicial. Es precisamente el efecto de Talbot que hemos descrito en las secciones anteriores. Pero en este caso podemos obtener aún más información. Evaluemos la solución (28) en los tiempos

$$t_{p,q} = \frac{d^2}{2\pi} \frac{p}{q}, \quad \text{con } p \in \mathbb{Z}, \quad q \in \mathbb{N}, \quad (p, q) = 1,$$

que son múltiplos racionales del periodo $d^2/2\pi$. Entonces,

$$u(x, t_{p,q}) = \frac{1}{d} \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{2\pi i \left(\frac{k}{d} x - 2\pi \frac{k^2}{d^2} \frac{d^2}{2\pi} \frac{p}{q} \right)} = \frac{1}{d} \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{2\pi i \left(\frac{k}{d} x - k^2 \frac{p}{q} \right)}.$$

Fijemos el número q . Sabemos que todo $k \in \mathbb{Z}$ se puede escribir como $k = \kappa q + m$ donde $\kappa \in \mathbb{Z}$, $0 \leq m < q$. Por lo tanto, reescribimos la suma anterior renombrando a κ de nuevo como k para obtener

$$\begin{aligned} u(x, t_{p,q}) &= \frac{1}{d} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{m=0}^{q-1} e^{2\pi i \left(\frac{kq+m}{d} x - (kq+m)^2 \frac{p}{q} \right)} = \frac{1}{d} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{m=0}^{q-1} e^{2\pi i \left(\frac{kq+m}{d} x - 2\pi i m^2 \frac{p}{q} \right)} \\ &= \frac{1}{d} \sum_{m=0}^{q-1} e^{2\pi i \frac{m}{d} x - 2\pi i m^2 \frac{p}{q}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{2\pi i q \frac{k}{d} x}. \end{aligned}$$

Utilicemos (29) para escribir

$$u(x, t_{p,q}) = \frac{1}{q} \sum_{m=0}^{q-1} e^{2\pi i \frac{m}{d} x - 2\pi i m^2 \frac{p}{q}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta(x - kd/q).$$

De la misma manera que antes, separamos la suma en los enteros (la suma en k) módulo q para escribir

$$u(x, t_{p,q}) = \frac{1}{q} \sum_{m=0}^{q-1} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{r=0}^{q-1} e^{2\pi i \frac{m}{d} x - 2\pi i m^2 \frac{p}{q}} \delta \left(x - d \frac{kq+r}{q} \right).$$

Vemos que la suma de las deltas determina la forma de los puntos x en los que tendremos una contribución no nula. En otras palabras, si $x \neq d \frac{lq+s}{q}$ para l y s enteros, la suma de deltas será nula y el valor de x en la exponencial no tiene ningún efecto en este caso. Por otro lado, si $x = d \frac{lq+s}{q}$ con l y s enteros, solo sobrevive la delta que corresponde a l y a s , y por lo tanto podemos sustituir x por $d \frac{lq+s}{q}$ en la exponencial. Así, obtenemos

$$\begin{aligned} u(x, t_{p,q}) &= \frac{1}{q} \sum_{m=0}^{q-1} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{r=0}^{q-1} e^{2\pi i \frac{m}{d} d \frac{kq+r}{q} - 2\pi i m^2 \frac{p}{q}} \delta \left(x - d \frac{kq+r}{q} \right) \\ &= \frac{1}{q} \sum_{m=0}^{q-1} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{r=0}^{q-1} e^{2\pi i m \frac{r}{q} - 2\pi i m^2 \frac{p}{q}} \delta \left(x - d \frac{kq+r}{q} \right) \\ &= \frac{1}{q} \sum_{m=0}^{q-1} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{r=0}^{q-1} e^{2\pi i \frac{r m - pm^2}{q}} \delta \left(x - d \frac{kq+r}{q} \right). \end{aligned}$$

Observamos que hemos generado lo que se conoce como una **suma cuadrática generalizada de Gauss**, que denotamos por

$$(30) \quad G(a, b, c) = \sum_{m=0}^{c-1} e^{2\pi i \frac{am^2+bm}{c}}$$

para enteros a, b, c . Con esta notación, obtenemos

$$(31) \quad u(x, t_{p,q}) = \frac{1}{q} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{r=0}^{q-1} G(-p, r, q) \delta \left(x - dk - d \frac{r}{q} \right).$$

La expresión (31) es precisamente a lo que llamamos **efecto de Talbot**. Vamos a ver que la solución u tiene el mismo comportamiento que el rayo de luz que atraviesa una rejilla de difracción, pero para eso necesitamos conocer el valor de la suma de Gauss. Afortunadamente, las sumas cuadráticas de Gauss son objetos ampliamente estudiados. El lector puede consultar el primer capítulo del libro *Gauss and Jacobi sums* [1] y el apéndice del artículo de Hoz y Vega [4]. Sabemos decir, por ejemplo, que cuando $(p, q) = 1$ como en nuestro caso,

$$(32) \quad G(-p, r, q) = \begin{cases} \sqrt{q} e^{i\theta_r}, & \text{si } q \text{ es impar,} \\ \sqrt{2q} e^{i\theta_r}, & \text{si } q \text{ es par y } q/2 \equiv r \pmod{2}, \\ 0, & \text{si } q \text{ es par y } q/2 \not\equiv r \pmod{2}. \end{cases}$$

Aquí, el ángulo θ_r depende de r y también de p y de q , pero al ser p y q los valores que determinan el tiempo $t_{p,q}$, podremos considerar que son valores fijos cada vez que determinamos un tiempo. Analicemos algunos casos particulares para convencernos de que realmente tenemos el efecto de Talbot ante nuestros ojos.

- Sea $q = 1$, tal que $t_{p,1} = pd^2/2\pi$. Entonces, en la expresión de u (31), se tiene $r = 0$ y

$$u(x, t_{p,1}) = G(-p, 0, 1) \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta(x - kd) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta(x - kd),$$

dado que gracias a la definición (30) es fácil ver que $G(-p, 0, 1) = 1$. Por eso, vemos que en los tiempos $t_{p,1}$ recuperamos el dato inicial. La solución es, por lo tanto, periódica en tiempo con periodo $t_{1,1}$, que es el periodo mínimo. Podríamos decir, por lo tanto, que $t_{1,1}$ es la **distancia de Talbot**,

$$(33) \quad z_T = t_{1,1} = \frac{d^2}{2\pi}.$$

- Sea $q = 2$, que significa que $t_{1,2}$ es la mitad de la distancia de Talbot. Esperamos, pues, recuperar el dato inicial trasladado por medio periodo. Para verlo, escribamos

$$u(x, t_{1,2}) = \frac{1}{2} \sum_{r=0}^1 G(-1, r, 2) \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta \left(x - dk - d \frac{r}{2} \right).$$

De acuerdo con la fórmula (32), o calculándola directamente, la suma de Gauss es nula cuando $r = 0$, y por lo tanto tenemos

$$u(x, t_{1,2}) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta(x - kd - d/2).$$

Es un tren de deltas centradas en cada $d(k + 1/2)$, que son los puntos medios entre las deltas iniciales. Es precisamente el fenómeno que esperábamos desde que vimos la alfombra en la figura 2.

- Sea $q = 4$, que corresponde a un cuarto de la distancia de Talbot. Esperamos que la solución sea el dato inicial duplicado. Si miramos a la fórmula (31), vemos que solo sobreviven los sumandos con $r = 0, 2$, y

$$u(x, t_{1,4}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[e^{i\theta_0} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta(x + kd) + e^{i\theta_2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta(x + kd + k/2) \right].$$

Esto muestra que hay deltas en los mismos puntos que el dato inicial (aunque en este caso vienen multiplicadas por ciertas constantes complejas unimodulares), así como en los puntos medios.

- En general, podemos comprobar que para diferentes valores de q la solución de la ecuación de Schrödinger se comporta como la alfombra de Talbot que vimos en la figura 2, en todos los múltiplos racionales de la distancia de Talbot z_T determinada en (33).

En definitiva, hemos visto que el mismo efecto que observamos y explicamos en la sección 1 y que deducimos en las secciones 2 y 3 se refleja en la solución de la ecuación de Schrödinger con el dato inicial periódico, que proponemos como paralelismo al *dato inicial* que de alguna manera representa la rejilla en el caso de la luz.

Referencias

- [1] BERNDT, Bruce C.; EVANS, Ronald J. y WILLIAMS, Kenneth S. *Gauss and Jacobi sums*. Canadian Mathematical Society Series of Monographs and Advanced Texts. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1998. ISBN: 0-471-12807-4.
- [2] BERRY, Michael V. y KLEIN, S. «Integer, fractional and fractal Talbot effects». En: *J. Modern Opt.* 43.10 (1996), págs. 2139-2164. ISSN: 0950-0340. <https://doi.org/10.1080/095003496154761>.
- [3] CERDÀ, Joan. *Linear functional analysis*. Vol. 116. Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, Providence, RI; Real Sociedad Matemática Española, Madrid, 2010. ISBN: 978-0-8218-5115-9. <https://doi.org/10.1090/gsm/116>.
- [4] HOZ, Francisco de la y VEGA, Luis. «Vortex filament equation for a regular polygon». En: *Nonlinearity* 27.12 (2014), págs. 3031-3057. ISSN: 0951-7715. <https://doi.org/10.1088/0951-7715/27/12/3031>.
- [5] HUYGENS, Christiaan. *Traité de la lumière*. Leiden: Pieter van der Aa, 1690.
- [6] LORD RAYLEIGH, John William Strutt. «On Copying Diffraction-gratings, and on some Phenomena connected therewith». En: *Philos. Mag.* (Mar. de 1881).
- [7] LORD RAYLEIGH, John William Strutt. *The Theory of Sound*. Dover, 1894.
- [8] QUANTUM NANOPHYSICS GROUP, Universidad de Viena. *Quantum Interactive. The Talbot-Effect*. URL: <http://interactive.quantumnano.at/advanced/quantum-experiments/talbot-effect/> (visitado 10-12-2016).
- [9] SKYSKULL, Dr. *Skulls in the Stars. Rolling out the (optical) carpet*. URL: <https://skullsinthestars.com/2010/03/04/rolling-out-the-optical-carpet-the-talbot-effect/> (visitado 26-04-2017).
- [10] TALBOT, Henry Fox. «Facts Relating to Optical Science. No. IV». En: *Philos. Mag.* (Dic. de 1836).
- [11] VLADIMIROV, Vasily S. *Equations of mathematical physics*. Vol. 3. Marcel Dekker, Inc., New York, 1971.